Entscheidungsfindung unter Unsicherheit als fächerübergreifende Kompetenz: Alltagsorientierter Stochastikunterricht am Gymnasium

PROJEKT BERLIN/CHEMNITZ

LAURA MARTIGNON & CHRISTOPH WASSNER
Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin

PETER SEDLMEIER · TU Chemnitz

KENNWORT: Stochastik in der Schule
FACHGEBIET UND AUSRICHTUNG: Didaktik der Stochastik, Kognitionspsychologie

Stochastik ist anwendungsbezogen und realitätsnah wie vielleicht kein anderer Bereich der Mathematik. Grundlegende stochastische Kompetenzen sind nötig, um mit zahlreichen, alltäglichen Entscheidungssituationen zurecht zu kommen. Bei deutschen Schülern können erhebliche Probleme mit stochastischen Fragestellungen festgestellt werden. Ein wichtiger Grund dafür scheint der Unterschied zwischen Denken unter Unsicherheit und dem eindeutigen, deduktiven Vorgehen der Mathematik zu sein. Es wird auch häufig darauf hingewiesen, daß stochastische Denkprozesse, mehr als andere mathematische, individuell verschiedenartig ablaufen können. Das Projekt beschäftigt sich deshalb grundlegend mit möglichen Strategien zur Lösung und zum Verstehen probabilistischer Situationen. Ein weiteres Problem sehen wir aber auch darin, dass der Mathematikunterricht offenbar nur unzureichend zum Transfer gelernter Verfahren auf alltägliche Anwendungssituationen befähigt, insbesondere weil Aufgabenkontexte meist nicht aus dem Erfahrungsumfeld der Schüler stammen.

A. Basiswissen

1. Kognition

Verarbeitung von Informationen

- “Automatic frequency processing” (Hasher & Zacks, 1979)
- Ein “innerer Algorithmus” zur Informationsverarbeitung bei Wahrscheinlichkeitsproblemen basiert eher auf Häufigkeiten (Sedlmeier, 1999)
- Begriff der “ökologischen Rationalität” (Gigerenzer & Goldstein, 1996): Kognitive Fähigkeiten nach Maßgabe der verfügbaren Umweltinformationen

Repräsentationen

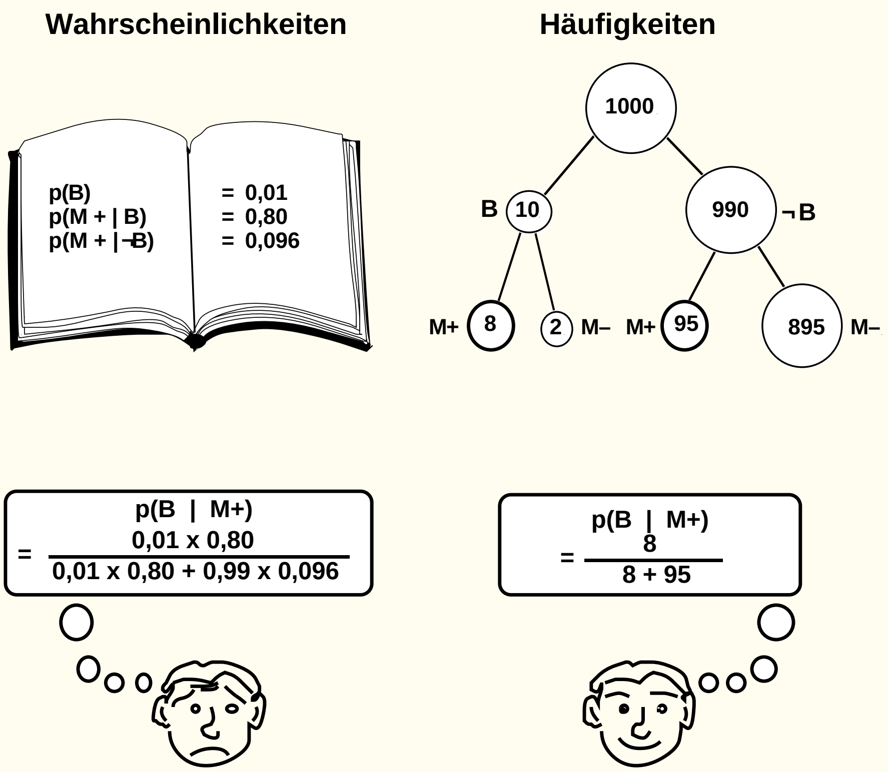
- Konzept der “Natürlichen Häufigkeiten”: Performanz- und Verfügbarkeitsverbesserung z.B. bei bayesianischer Inferenz (Gigerenzer & Hoffrage, 1995. Sedlmeier, 1997)
- Erleichterung der Entscheidungsfindung unter Unsicherheit (z.B. bei Gericht: Krauss & Hertwig, 2000. Ärztliche Diagnose: Hoffrage, Kurzenhäuser & Gigerenzer, 2000)
- Anwendungen in der Schulstochastik (Wassner, Krauss & Martignon, im Druck)
- Multimodalität und Behaltensleistung (Paivio, 1973) und kreatives Denken (Krause et al., 1999)

B. Beispiele

Beispiel: Zwei verschiedene Repräsentationen eines typischen Wahrscheinlichkeitsrevisionsproblems:

FORM
links: deduktiv-formal
Wahrscheinlichkeiten (dezimal)
und Formel

BAUM
rechts: induktiv-anschaulich
Absolute Häufigkeiten
und Baumdiagramm



Einige Ergebnisse:

Lösungsraten, Verstehen und Verfügbarkeit steigen drastisch bei der Verwendung von Häufigkeitsrepräsentationen.

Z.B. Studie mit Studenten, Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrevision
Ohne Fehler: FORM: 17,7%, BAUM: 57,3% (Hoffrage & Gigerenzer, 1995)

Das gilt ebenfalls für Aufgaben zur Konjunktion und Bedingung von Wahrscheinlichkeiten. (Sedlmeier, 2000)

C. Fragen und Hypothesen

Fragen und Hypothesen werden in Einzelstudien untersucht werden. Ergebnisse dienen auch der Ausarbeitung von Maßnahmen innerhalb der Interventionsstudie in der Sek.II

Welchen Einfluss haben unterschiedliche Repräsentationsformen auf das Verstehen von grundlegenden Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit bei Schülern?
Wie wirkt sich hierbei eine hohe aktive Involvierung in den Lernprozessen aus?

Hypothesen:

- Das Verstehen der grundlegenden Eigenschaften, wie etwa Konjunktion oder bedingte Wahrscheinlichkeit, wird durch Training mit Repräsentationsmodell “Häufigkeitsraster” stärker begünstigt als mit Repräsentationsmodell “Venn-Diagramm”. Zu erklären wäre dies mit den empirisch gefundenen Vorteilen von natürlichen Häufigkeitsmodellen gegenüber wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen (Natural Frequency-Theorie).
- “Learning by doing”-Varianten am Computer begünstigen das Verstehen zusätzlich. Das begründen wir mit positiven Effekten einer aktiven Involvierung der Lernenden in die Lern- und Problemlöseprozesse (z.B. ACT-Theorien, Anderson).

Welchen Einfluss haben unterschiedliche Repräsentationsformen auf das Verstehen stochastischer Probleme zu bayesscher Inferenz?
Wie wirkt sich hierbei multimodale Repräsentation aus?

Hypothesen:

- Durch unimodales Training mit Häufigkeitsrepräsentationen wird das Verstehen bayesscher Inferenzprobleme stärker begünstigt als durch Training mit Wahrscheinlichkeitsrepräsentationen.
- Durch multimodale Trainingseinheiten mit je einer Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsrepräsentation wird Verstehen stärker begünstigt als durch unimodale (bei gleicher Gesamtdauer).
- Eine zusätzliche Repräsentationsform hat weiteren positiven Effekt auf das Verstehen, dessen Stärke jedoch abnimmt. Wir erwarten einen Rückgang der positiven Effekte bei steigender Multimodalität aufgrund begrenzter Trainingszeit und kognitiver Verarbeitungsfähigkeit.
- Der Grad der Lernmotivation ist bei Häufigkeitstrainings tendenziell höher. Die Erhöhung der Motivation resultiert aus geringerer Abstraktion. Bei Gruppen mit multimodaler Repräsentation ist sie am höchsten. Analogiebildung ist erforderlich, die einen kreativeren Denkprozeß angeregen kann (siehe Krause, Seidel et al., 1999).

A. Basiswissen

2. Methoden

Statistischer Methodenstreit

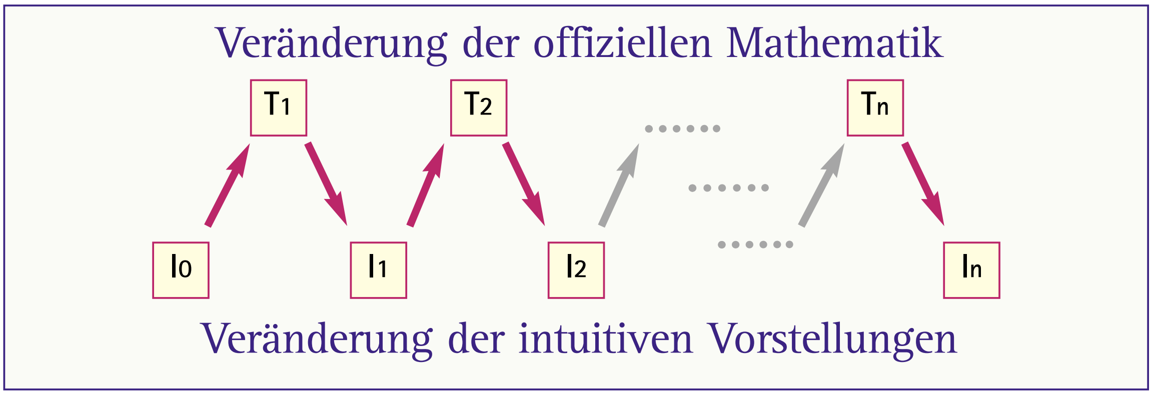
- ¤ Klassische vs. bayessche Grundanschauungen und Paradigmen
- ¤ Didaktische Begriffsbildungen: objektivistische vs. subjektivistische Interpretationen (Wickmann, 1998)
- ¤ Synthese: Wechselspiel von Intuition und Mathematik (Borovcnik, 1992)
- ¤ Ritualisierung klassischer Methoden in der beurteilenden Statistik vs. statistisches Denken (Gigerenzer, 1999)

Konzept der Signifikanztests

- ¤ Anwendung des Konzeptes vs. Verstehen der Bedeutung (Oakes, 1986)
- ¤ Didaktische Alternativen und Sichtweisen (Krauss & Wassner, 2000)

B. Beispiele

Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik (Fischbein, 1987)



Was bedeutet Signifikanz?

"Stellen Sie sich vor, Sie prüfen mit Hilfe eines Tests statistisch, ob der zwischen 2 Populationen gefundene Unterschied signifikant ist. Es stellt sich heraus, daß der Unterschied auf dem 1% Niveau signifikant ist. Welche der folgenden Aussagen lassen sich nun aus dieser Tatsache folgern?

1. *Es ist eindeutig bewiesen, daß die Nullhypothese (z.B. daß zwischen den Populationsmittelwerten kein Unterschied besteht) falsch ist.*
2. *Die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens der Nullhypothese ist gefunden worden.*
3. *Es ist eindeutig bewiesen, daß die Alternativhypothese (daß es einen Unterschied zwischen den Populationsmittelwerten gibt) wahr ist.*
4. *Man kann nun die Wahrscheinlichkeit ableiten, daß die Alternativhypothese richtig ist.*
5. *Entscheidet man sich nun, die Nullhypothese zu verwerfen, dann weiß man jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese Entscheidung falsch sein könnte.*
6. *Der experimentelle Befund ist reliabel in dem Sinne, daß man in 99% der Fälle ein signifikantes Ergebnis bekäme, wenn man das Experiment sehr oft wiederholen würde."*

Keine der Aussagen ist richtig! Hätten Sie es gewußt?
Wenn nein, sind Sie in bester Gesellschaft. Keiner unserer befragten Studenten der Psychologie und nur wenige Statistik-Lehrende (29%) an der Universität wußten es, sogar Mathematik-Didaktiker irrten sich (eigene Studie, Krauss & Wassner, eingereicht).

Ergebnis:

Dem Konzept der Signifikanz liegt eine spezielle Sichtweise zugrunde. Sie wird durch die aktuelle Praxis des Unterrichts in Testverfahren nur unzureichend deutlich.

C. Fragen und Hypothesen

Welchen Einfluss haben unterschiedliche Repräsentationsformen auf das Verstehen von Hypothesentests?

- ¤ *__TrT 1__ (Klassische Signifikanz): Vorgehensweise wie bei der klassischen Einführung der Signifikanz-Hypothesentests über die Vorgabe des Irrtumsrisikos (Signifikanzniveau = obere Schranke des Risikos 1. Art) und der Bestimmung einer Entscheidungsregel. Fällen der Entscheidung aufgrund der Stichprobe. Eine analytisch-funktionale Repräsentation ist vorherrschend.*
- ¤ *__TrT 2__ (Synthese des klassischen und bayesschen Testverfahrens): Es erfolgt eine multiple Klassifizierung des Testproblems über den Satzes von Bayes als weitere Inferenzmöglichkeit (A und B durch H und D ersetzen, $P(H \mid D)$ liegt bayesschen Testverfahren zugrunde) und gleichzeitiger Darstellung von Signifikanz als die dazu inverse bedingte Wahrscheinlichkeit $P(D \mid H_0)$. Risiken und daraus folgende Entscheidungsregeln werden ebenfalls anhand dieses Modells erklärt. Die Repräsentation ist aus dem Bereich der anschaulichen Mengenlehre.*

Hypothesen:

Durch TrT2 wird das Verstehen von Aussagen statistischer Tests stärker begünstigt als durch TrT1 bei gleicher Gesamtdauer des Trainings. Das erklären wir mit den Vorteilen einer inversen Doppelrepräsentation eines Problems und der Klassifizierung in weiteren Basisbereichen der Stochastik (multiple Klassifizierung).

Modellbildung:

Folgerungen für die Didaktik der beurteilenden Statistik

Übliches Verfahren:

Zunächst ...	Danach ...
... werden bedingte Wahrscheinlichkeiten und der Satz von Bayes mit allgemeinen Ereignissen A und B eingeführt – ohne die Berücksichtigung des Begriffs der Hypothese H.	... werden davon losgelöst Signifikanz- tests und der Begriff der Hypothese H eingeführt, und zwar unabhängig von bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Erforderliches Verfahren:

Zunächst	Danach ...
... sollten bedingte Wahrscheinlichkeiten und der Satz von Bayes inklusive des Begriffs der Hypothese H eingeführt werden.	... sollte Signifikanz als bedingte Wahrscheinlichkeit $P(D \mid H_0)$ und der Zusammenhang zu bayesschen Testaussagen $P(H \mid D)$ über die Formel von Bayes erklärt werden.

A. Basiswissen

3. Motivation

pädagogische Unterrichtsmotivation

¤ Ich-Identität wird erreicht durch Öffnung des Stochastikunterrichts. (z.B Öffnung zu authentischen Kontexten und projektorientierten Unterrichtsformen, in die stochastische Probleme eingebettet sind)

Aufgabenkontext

¤ Authentizität: Beispiele aus der Erfahrungswelt der Schüler erhöhen Aufmerksamkeit, Interesse und Motivation, sich mit der Stochastik auseinanderzusetzen.

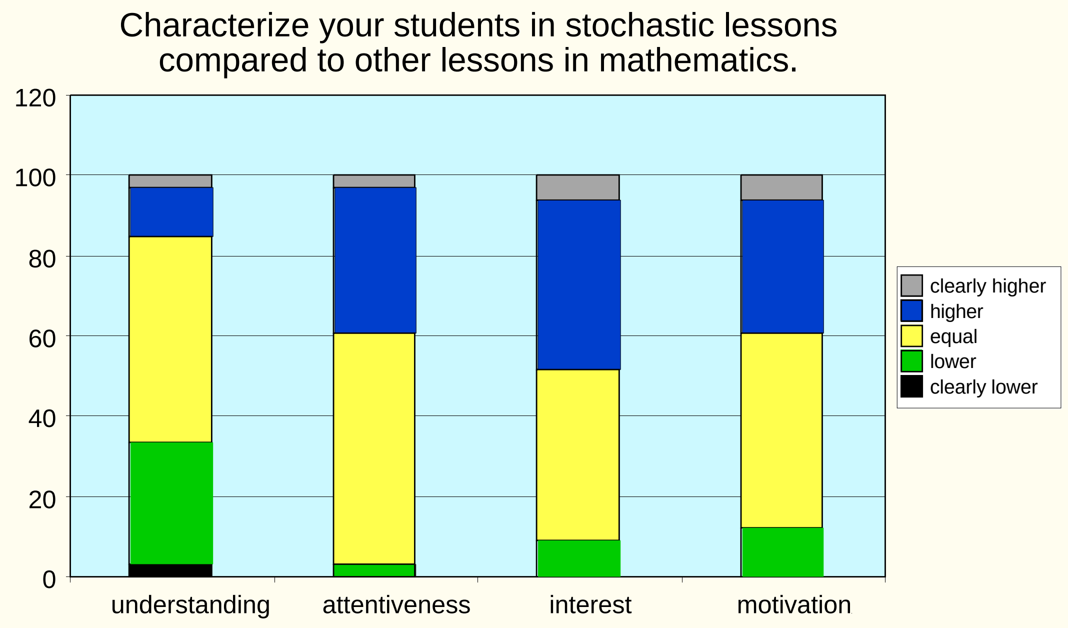
¤ Unterscheidung von Sachkontext und interaktivem Kontext bei der Bildung eines persönlichen Aufgabenkontextes (Clarke & Helme, 1998)

B. Beispiele

Sind Schüler im Stochastikunterricht motiviert(er)?

In einer Fragebogenstudie mit Mathematiklehrern baten wir u.a.:
Bitte charakterisieren Sie Ihre Schüler im Stochastikunterricht - im Vergleich zu anderen Teilgebieten des Mathematikunterrichtes - unter den folgenden Aspekten:

	deutlich höher	höher	gleich	niedriger	deutlich niedriger
Interesse	6 %	42,5 %	42,5 %	9 %	0 %
Aufmerksamkeit	3 %	36 %	58 %	3 %	0 %
Verstehen	3 %	12 %	52 %	30 %	3 %
Motivation	6 %	33 %	49 %	12 %	0 %



Ergebnis:

Die befragten Lehrer schätzten ihre Schüler tendenziell aufmerksamer, interessierter und motivierter im Stochastikunterricht ein - im Vgl. zum sonstigen MU. Jedoch das Verstehen und die Durchdringung stochastischer Themen beurteilten ein Drittel schlechter als bei sonstigen Mathematikproblemen. Gründe für diese konträre Einschätzung müssen genauer untersucht werden. Wir sehen große Schwächen in Vermittlungsprozessen wie etwa Repräsentation und Kommunikation, teilweise auch in den lehrplantechnischen Restriktionen.

C. Fragen und Hypothesen

Hat die spezielle Verwendung authentischer Kontexte Auswirkungen auf Lernmotivation und Verstehen stochastischer Probleme?

¤ In dieser Einzelstudie geht es zunächst darum, Themen zu erfassen, die für Schüler von besonderem Interesse sind. Es soll geprüft werden, ob die Verwendung dieser Themen als Kontexte bei stochastischen Problemstellungen tatsächlich positiven Einfluß auf Lernmotivation und Verständnis der Schüler hat.

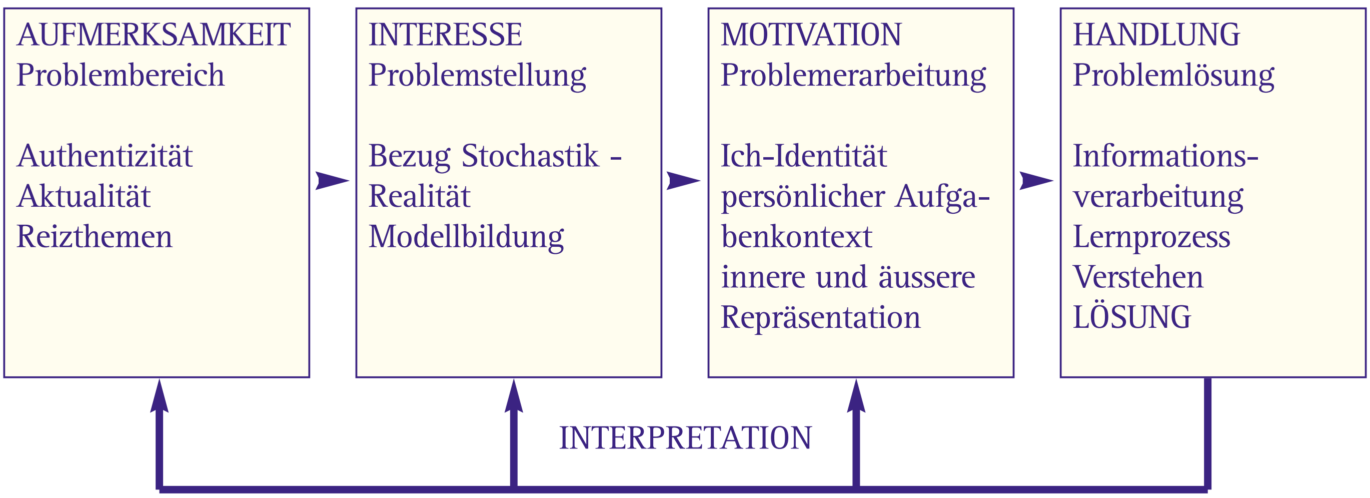
¤ **AuaK** (Aufgabe authentischer Kontext): Die Schüler müssen mehrere Aufgaben mit von uns ermittelten authentischen Kontexten des Theoriebereichs lösen.

¤ **AuL** (Aufgabe Lehrbuch): Die Schüler müssen mehrere Aufgaben des Theoriebereichs lösen, wie sie in konventionellen Lehrbüchern zu finden sind.

Hypothesen:

Die Verwendung der vorher bei Schülern ermittelten authentischen Kontexte erzeugt höhere Motivation, sich mit stochastischen Fragestellungen auseinanderzusetzen, als herkömmliche Lehrbuchkontexte. Hier sehen wir einen direkten Zusammenhang mit folgender Hypothese:
Unter der Verwendung von authentischen Kontexten (AuaK) erreichen die Schüler ein tieferes Verständnis für das Problem als unter der Verwendung von üblichen Lehrbuchaufgaben (AuL).

Modellbildung:



A. Basiswissen

4. Computer-Tutoring

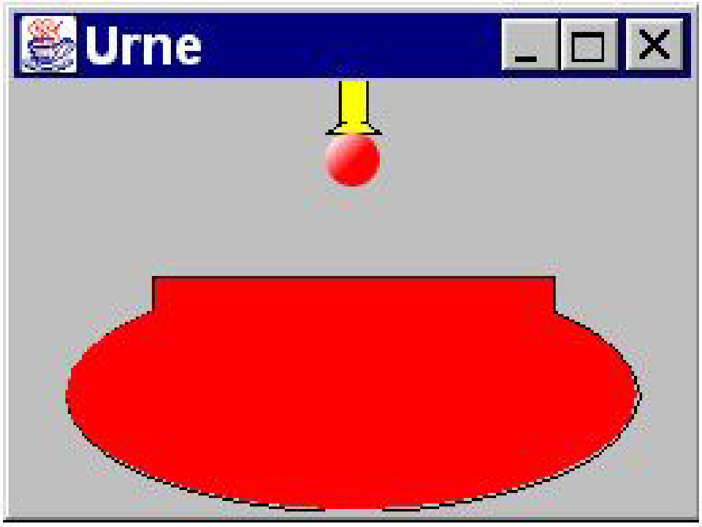
computergestütztes stochastisches Training

- Studien über den Einsatz von computergestützten Trainingsprogrammen zu unterschiedlichen stochastischen Problemen (Sedlmeier, 1997, 1998, 1999, 2000. Sedlmeier & Gigerenzer, im Druck)
- Implikationen für die Gestaltung von Statistiktutoren (Sedlmeier & Wettler, 1998)

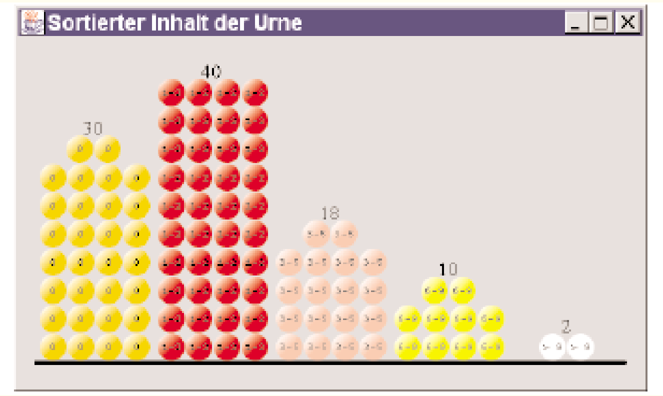
Simulation von Experimenten

- Die virtuelle Urne: flexible Modellierung der Realität, schnelle Alternative zum Realexperiment am Computer (Sedlmeier & Köhlers, im Druck)
- Visualisierung von Ergebnissen auch bei umfangreichen Zufallsziehungen

B. Beispiele



Die virtuelle Urne.
Aus der Urne, die eine blaue und eine rote Kugel enthält, wurde gerade zufällig die rote Kugel gezogen.



Ein möglicher Inhalt der virtuellen Urne: Die Verteilung der Häufigkeiten von beobachteten Busverspätungen. Die Zahlen auf den Kugeln stehen jeweils für "Minuten Verspätung".

Die drei Regeln für den Urneninhalt sind: Die unterschiedlichen Kategorien in der Urne müssen

1. klar definiert sein,
2. exhaustiv (vollständig) sein und
3. exklusiv (inhaltlich nicht überlappend) sein.

Die Veränderung der relativen Häufigkeit von "4" über 60 Ziehungen aus der Urne.
Zum Vergleich ist der erwartete Wert (1/6 oder 16,67%) eingezeichnet

C. Fragen und Hypothesen

Wie kann der Einsatz von interaktiver Simulations- bzw. Trainingssoftware beim Verstehen und der Durchdringung stochastischer Problemlösungen helfen, insbesondere bei einer Betonung der "Learning by doing"-Komponenten des Trainings? Gibt es motivationale Anreize?

Diese Frage soll nicht durch eine Einzelstudie untersucht werden, sondern wird innerhalb der Interventionsstudie eine verstärkte Rolle spielen. Eine Bewertung wird eher qualitativ angestrebt.

Intervention

Im Ergebnis soll ein Lehr-Lern-Konzept, das diese Fragen auf besondere Weise berücksichtigt und integriert, für eine umfassende **Interventionsstudie** innerhalb der Sekundarstufe II erstellt werden. Diese quasiexperimentelle Implementationsstudie mit Videoaufzeichnung in Form eines neugestalteten Unterrichtszyklus zu zusammenhängenden stochastischen Themen wird, wie wir erwarten, Aufschlüsse über obige Fragen in der konkreten Unterrichtsituation geben können. Bei Erfolg der neuen Konzeptionen können weitere Teilbereiche der Stochastik nach obigen Erkenntnissen für den Unterricht umgestaltet werden und weitere Interventionen durchgeführt werden. Bei Konzeptionierung und Implementation sollen die Verwendung von Themen aus der Lebenswelt der Schüler (authentische Kontexte), der Einsatz computergestützter Tutoringsysteme und deren Auswirkung auf Lernmotivation, Lernprozess und Verständnis hohe Beachtung finden. Weitere Aspekte können bei der Evaluation der Interventionsstudie hinzukommen: Z.B. Führt ein häufigerer Problemkontextwechsel zu besseren Transferfähigkeiten bei stochastischen Problemen?

ausgewählte LITERATUR

Borovcnik, M. (1992). *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik, Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik*. Band 10, Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

Gigerenzer, G. (1999). Mentale Fakultäten, methodische Rituale und andere Stolpersteine. *Zeitschrift für Psychologie*, 207, S.287-297.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102, 684-704.

Gigerenzer, G. & Goldstein, D. G. (1996). Reasoning the fast and frugal way: Models of bounded rationality. *Psychological Review*, 103, pp. 650-669.

Hasher, L. & Zacks, R.T. (1979). Automatic and effortful processes in memory. *Journal of Experimental Psychologie: General*, 108, 356-388.

Krause, W., Seidel, G. et al. (1999). Multimodale Repräsentation als Basiskomponente kreativen Denkens. *Kreatives Denken und Innovationen in mathematischen Wissenschaften - Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik*. Tagungsband.

Krauss, S. & Wassner, C. (2000). Probleme bei der Interpretation signifikanter Testergebnisse. In: Neubrand, M. & Jahnke, T (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2000*, Hildesheim: Franzbecker.

Martignon, L. (2000). Repräsentation von Information in mathematischen Kontexten: eine kognitionspsychologische Vision. In: Neubrand, M. & Jahnke, T (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2000*, Hildesheim: Franzbecker.

Sedlmeier, P. (1997). BasicBayes: A tutor system for simple Bayesian inference. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers*. 29, pp. 328-336.

Sedlmeier, P. (1998). The distribution matters: Two types of sample-size tasks. *Journal of Behavioral Decision Making*, 11, pp. 281-301.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning: Theoretical models and practical implications*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Sedlmeier, P. (2000). How to improve statistical thinking: Choose the task representation wisely and learn by doing. *Instructional Science*, 28, 227-262.

Sedlmeier, P. & Köhlers, D. (im Druck). *Wahrscheinlichkeiten in der Praxis*. Braunschweig: Westermann-Schulbuchverlag.

Wassner, C., Krauss, S. & Martignon, L. (im Druck). Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein. *Praxis der Mathematik*.

Wickmann, D. (1998). Zur Begriffsbildung im Stochastikunterricht. *Journal für Didaktik der Mathematik*, Heft 1/98, S. 46-80.